

母分散の不変推定値はなぜ $n-1$ で割られるのか

Why divide by $n-1$ when we estimate population variance

宇津木 成介・野口 智草
Narisuke Utsuki, Chigusa Noguchi

要旨 (Abstract)

文系の学部における初等統計学の教育では、標本から母集団の分散を推定する際、標本の偏差平方和を n で割るかわりに $n-1$ で割るべきことを教えるが、なぜそうであるのかを説明することは簡単ではない。本研究では、複数の内外の教科書がこの問題についてどのように対処しているかを概観した。結論として、いずれの教科書においても、わかりやすい説明は見当たらなかった。初学者向けの説明としては、実例を多く挙げて説得を試みること、また、 n 個の標本に基づく標本平均値の分散の期待値が母分散を n で割ったものに等しいことをわかりやすく説明することが必要であろう。

キーワード：(母集団分散) (標本分散) (不偏推定値)

I. はじめに

文系の学部・大学院では、経済学を除いて、学生に対して、数学の知識・技能を要求することはほとんどない。例外は、おそらく、社会学、心理学、教育心理学における統計学の授業であろう。これらを専門とする学部学科では、基礎的な統計学の教育を行っているし、また、卒業論文や修士論文を作成する場合には実際に統計処理を求められることが少なくない。数値の平方根を求めるだけで一苦労した時代とは異なって、すぐれた統計アプリケーション・ソフトウェアがあり、ボランティアの努力によって無償で提供される統計処理プログラムがウェブ上で使用できる。基礎的な統計処理であれば、エクセルの関数だけでも十分である。単に統計的な計算を行うだけであれば、これらのアプリケーションの使い方を教えればよいようなものであるが、それらが提供している統計処理の意味を理解しないままであると、データ処理に誤りがあって異常値が出力されても気づかない、数値の解釈ができないなど、教育上のマイナスが大きい。

多くの場合、初歩の統計学の授業では、ランダム・サンプリングや正規分布の話からスタートして、信頼区間の算出や、 t 値による平均値の差の検定に進む。この際、筆者らの体験上、学生がつまずきがちであり、教員の教育に疑問を持たれるきっかけになるにもかかわらず、教員がうまく対処できない典型的な項目は、標本から推定される母集団分散の推定値を表す式の分母が、標本数の n ではなく、 $n-1$ であることである。

標本の n 個の平均値（標本測定値の総和を n で割る）をなんども繰り返して算出し、その平均をとると、その平均値は母集団平均値に近づく（標本測定値の総和を n で割った数値は、母平均の不偏推定値である）。多くの学生はこのことが直感的に理解できるために、どうして分散の場合にかぎって n ではなく、 $n-1$ で割る必要があるの

か、首をひねることになる。そして、多くの場合、初歩の統計学を教えている教員に質問しても、明確な答えは返ってこない。

筆者らの経験上、ほとんどの学生は、「標本測定値自体の分散を求めるときは n で割り、母集団の分散を推定するときには $n-1$ で割る」という天下り式の説明を受け入れる。首を傾げる学生に対して、教員は、「標本の分散は小さめになる。母集団の分散は標本から得られる分散より少し大きい」と説明することがある。これは間違った説明ではないが、なぜ $n-1$ で割るのかの説明にはなっていない。あるいは、教員は、「 $n-1$ はあとで説明する自由度である」と説明することがある。この説明も間違っていないが、自由度を学生にわかりやすく説明することは困難であるし、不偏分散の推定を行うときに自由度を使わねばならない理由を説明することはさらに難しそうである。このように曖昧な説明に始終していると、教員自身もよくわかっていないらしいことを学生はうっすらと感づいて、それ以上の質問はせず、黙りこんでしまう。

これまでに筆者らがうけた説明の中でもっとも良心的だったのは、「私にもなぜ $n-1$ で割るのがよいかわからないが、数学の専門家がその正しさを証明しているのだから、それを信じて先に進もう」という教員のコメントであった。その教員が本当に自分で理解していなかったとは思えないが、学生が容易に理解できるような説明ができないかぎり、「君たちにはわからないだろうから、先に進もう」というよりは、教育的に優れているように思われる。以下に述べるのは、筆者らが統計学を学んだ折に使用し、あるいは授業において教科書、あるいは参考書とした書籍が、母集団の分散に関する不偏推定ではなぜ偏差平方和を $n-1$ で割るのかを説明するという問題（以下、「 $n-1$ 問題」と書く）にどう取り組んでいるかについて、その概略をまとめたものである。筆者らは、学生に対するわかりやすい説明について考案しつつあるが、それについては別の機会に譲る。

Ⅱ. 日本の教科書は $n-1$ 問題にどう対処しているか

1. 心理教育統計学

心理教育統計学（肥田野・瀬谷・大川、1961）は、初版が比較的最近まで、おそらくは1996年頃まで、使われてきた息の長い教科書である。この教科書の44ページの記述を、一部省略しながら書き換えると以下ようになる（同書中の N は n に置き換えてある）。

「6個の具体的な測定値からなる母集団からランダム・サンプルとして2個をとり、そのサンプルの分散を毎回算出し、その平均値を求める。この平均値は別に計算した母集団の分散の2分の1になっている。ここではサンプルの測定値 n は2である。さて、サンプルの分散を求める式において、 n から1を引いた値、つまり1で割ることにすると、値が2倍になる。これは母集団の分散と同じ値である。これは、一般に言えることなので、 $n-1$ で割った値が不偏推定値になる（下線は筆者）。」

非常に親切、かつ具体的な説明であるが、母集団が6つの値からなり、かつサンプルサイズ n が2の時に限った説明であり、母集団のサイズが6ではない場合や、サンプルサイズ n が2以上のときに、この説明が一般に成り立つ理由は示されていない。また、この説明では、サンプルはランダムに取るのであるが、無限母集団からランダムにサンプルをとることと、有限母集団から2つのサンプルを採取する場合の数を網羅することとが、同等であることについて説明がない。つまり、有限母集団の分散を正確に推定するためには、2つの（複数の）サンプルを同時に採取してはいけないこと、また、無限母集団からのランダムなサンプルの性質（平均と分散）を毎回算出することを無限回繰り返すことが、性質のわかっている有限母集団からサンプルを取るすべての場合を網羅することと同等であることを明記したほうがよいように思う。

ひねくれた（しかも数学はできない）学生にしてみれば、6つの（しかも特定の値の）測定値をもつ母集団から2つの測定値をランダムに選んだサンプルをとって分散を算出することを繰り返して平均したものが（もしかすると偶然に）母集団の分散の2分の1になったとして、どうしてこの説明によって、一般に、分散の不偏推定値を求めるときに $n-1$ で割るのがよいと言えるのか、不思議に思うかもしれない。とはいえ、このように実例を挙げて説明するという方法は、非常に優れた説明方法の一つであろう。

2. 心理学のためのデータ解析テクニカルブック

心理学のためのデータ解析テクニカルブック（森・吉田、1990）はよく書かれた教科書の一つであると筆者らは考えている。同書の49～50ページにおいては、標本の分散が記述統計学における分散の定義と異なって、分母が n ではなく $n-1$ であることについて、定義通り n で割ると母分散を小さく見積もることになると述べ、その後で「厳密な式の説明は省略するが、次のような説明でおおまかに理解することはできるだろう」として概略以下のよう

な説明をしている。

「母平均 μ がわからないから \bar{X} を代用した。さて \bar{X} は μ を中心に σ^2/n の分散で分布している。つまり母分散は、 \bar{X} を中心とする X の分散と、 μ を中心とする \bar{X} の分散の和となる。」

この説明は、全分散が部分的な分散の和に分解できるという分散分析の基礎が理解されていれば、非常にわかりやすい。それでも、標本平均値の分散の期待値が σ^2/n になることについては別に説明が必要だろう。

もっとも、説明に用いられている $\sigma^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}$ という式は、未知の母分散と標本分散の和が未知の母分散と一致するように書かれているため、移項して整理すると

$\sigma^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ となることを示すにはわかりやすいが、その後で、これが実は母分散の不偏推定値であること

を示すために、 $\sigma^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \hat{\sigma}^2$ と書いて、当初から $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$ であったかのように表現することは、筆者らには抵抗がある。

すこしくどいかもしれないが、以下の説明を加えてはどうだろうか。まず、標本分散を計算し、これが母分散の推定値の最初の近似であると考える。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

しかし、標本平均の分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ が考慮されていないのでそれを足して、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}$$

と書くほうがより正確であろう。さらに、 $\hat{\sigma}^2$ を何度も計算して（標本を何度もとって）平均値をもとめると、 $\hat{\sigma}^2$ は真の母分散に近づくだらう。標本をとる手続きを m 回行くと、

$$m \hat{\sigma}^2 = \frac{m \sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n} + \frac{m \sigma^2}{n}$$

これを n で割る。左辺の $\hat{\sigma}^2$ は、 σ^2 に限りなく近づくことが期待されるので、

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}$$

と書いてもよいであろう。それから両辺を n 倍して

$$n\sigma^2 = \sum_i^n (X_i - \bar{X})^2 + \sigma^2$$

移項して整理して

$$(n-1)\sigma^2 = \sum_i^n (X_i - \bar{X})^2$$

これを $n-1$ で割ると

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

となる。

標本を 1 回しかとらなくても、推定値として一番確からしいのは、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

である。標本平均の分散の期待値が $\frac{\sigma^2}{n}$ であることを予めうまく示すことができれば、これは非常にわかりやすい説明の一つと言えるだろう。もっとも、標本平均の分散の期待値が $\frac{\sigma^2}{n}$ であることをわかりやすく説明することは、それほど容易ではなさそうだというのが、筆者らが持つ印象である。

なお、標本の分散が母分散を小さく見積もることなることについては、同書に以下のような脚注がある。

「第 1 章でも説明したように、 $\sum_i^n (X_i - c)^2$ を最小にする定数 c は \bar{X} である。したがって、標本平均が母平均と一致する時以外は、 $\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2$ は $\sum_i^n (X_i - \mu)^2$ よりも常に小さくなる。そこでこの分子が小さくなっている分を補正するために、 $\hat{\sigma}^2$ の分母が $n-1$ になっていると大まかに考えていただきたい。」

第 1 章の相当箇所は、21 ページの注 1 であろうと思われる。そこでは「平均値は $\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2$ を最小にする定数であることなどから、一般に標準偏差を散布度の測度として用いている。」と書かれているが、 \bar{X} が $\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2$ を最小にする理由は説明されていない。微分すればわかると言えばその通りであるが、数学のできない文系の初学者対するわかりやすい説明の根拠が、だんだんと難しくなるのは、望ましいことではないように思う。

3. 社会調査へのアプローチ

社会調査へのアプローチ（大谷・木下・後藤・小松・永野、1999）は社会調査が主眼の教科書であり、調査法については詳しいが、調査結果の統計処理については詳述されていない。標準偏差の計算は偏差平方和をデータ数で割るという記述統計学の方法が述べられている（p. 263-264）。巻末に SPSS を使った処理に関する記述があり、「アウトプットの読み方」として、SPSS の分散・標準偏差の定義がサンプル数 n ではなく $n-1$ で偏差平方和を割るようになっていること、その説明として、「これは母集団の推定値としてそのほうが適切であるからだ」と述べるにとどまっている（p. 301-302）。

4. 本当にわかりやすいすごく大切なことが書いてあるごく初歩の統計の本

「本当にわかりやすいすごく大切なことが書いてあるごく初歩の統計の本（吉田、1998）は非常に魅力的な題名の教科書である。テキストの作り方としては非常にユニークで、数式を使うことを本文中ではできるだけ避けようとしているが、そのためにかえって、「わかりやすさ」の妨げになっているところがあるように思われる。48ページに分散に関する記述があり、分散は偏差平方和をデータ数で割った値として定義されている。ここでは脚注で、SAS や SPSS などではデータ数 n ではなく、 $n-1$ で割っていることを述べ、「話が難しくなるので省略するが、前述の森・吉田（1990）の教科書におおまかな説明がある」と付記されている。この吉田の教科書は、細部については森・吉田（1990）を参照することを前提に書かれているようである。

5. パソコン楽々統計学

パソコン楽々統計学（新村、1997）は STATISTICA と呼ばれる統計処理パッケージの簡易版が CDROM で供給されている、親切な書物である。記述統計量について、出力を得るための統計処理プログラムの使い方は示されているが、いわゆる統計学的な説明はほとんどない。例えばテストデータを入力すると標準偏差、分散の数値がいくらかになるかは書いてあるが、それが母集団の推定値であるかどうかの説明はなく（p. 52）、分散は偏差平方和を $n-1$ で割った値としてのみ定義されている（p. 228）。しかし、「帰無仮説」の項では「 σ がわからないので代わりに s を用いる」との表現（p. 234）、また標準誤差の算出においては s の 2 乗を特に説明なしに標本分散と表現している（p. 235）。これらのことから、この本は、統計学の教科書というよりは、ある程度統計学の基礎知識がある者に向けて、統計パッケージの使い方を解説していると考えるべきであろう。

6. 統計調査法

統計調査法（西平、1957）は古い本であるが、非常にしっかりした教科書である。ただし、母分散の不偏推定値について直接的な記述はない。サンプリングに関する章（Ⅳ.サンプリング理論）にはサンプルの平均値の分散に関する記述があるが、わかりやすく書かれているわけではない。

Ⅲ. 英語で書かれた教科書は $n-1$ 問題にどう対処しているか

統計学に限ったことではないが、英語で書かれた数学のテキストは、日本語で書かれたテキストより、わかりやすい説明がなされていることが少なくない。これは、日本人が一般に数学に適性があるからなのか、日本では難しい教科書のほうが高く評価されるからなのか、わからない。それでも、 $n-1$ 問題については英語の教科書も、クリアな説明に成功していない。

1. Statistical methods for the social and behavioral science

Statistical methods for the social and behavioral science. (Marascuiolo & Serlin, 1988) は、面倒な正規分布の話から話を始めるのではなく、とにかく対象を測ってみよう、平均値を出してばらつきを調べよう、という実務的なスタンスで書き始められているが、 $n-1$ については、天下り式の書き方になっている。つまり、（１）母集団の得点について知りたいがわからない、（２）標本から母集団の分散を推定してみよう、（３） n で割ると過小評価になってしまう、（４） $n-1$ で割ることによって改善できる（p. 59-61）というものである。

2. Statistics for dummies

Statistics for dummies (Rumsey, 2003) は一般向けに書かれた英語のテキストである。題名は直訳すれば「おバカさんのための統計学」である。

標準偏差 s を求める式として偏差平方和を $n-1$ で割る $\sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ ことになっている。なぜ $n-1$ で割るのかというと、「統計学者は（偏差平方和を） n ではなく、 $n-1$ で割るが、それはこの標準偏差が理論にもっとも適した性質を持つからである。これについて読者はこれ以上詳しく知る必要はない。つまり $n-1$ で割った値は平均的には偏りがない。」と述べている (p. 106-107)。「読者はこれ以上詳しく知る必要がない」という部分の原文は、
“Believe me, that's more than you want to know about *that* issue” である。

3. Introduction to statistics

Introduction to statistics (Wagner, 1992) は学生向けのテキストである。具体的な測定値の集合（データ・セッ

ト）の分散について、 $v = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ であると、天下り式に定義されている (p. 57)。この教科書では母分散は出現確率から

$$\sigma^2 = \sum (X_i - \mu)^2 \cdot p(X_i)$$

と定義されている。そして s^2 は σ^2 の不偏推定値である ($E(s^2) = \sigma^2$) と定義されている。このような「定義されている」という天下り式の説明をして、 n で割る可能性について触れなければ、なぜ n で割らないのかという疑問は出ないかもしれない。

4. The Cartoon guide to statistics

The Cartoon guide to statistics (Gonick & Smith, 1993) は「マンガでわかる統計学」であるが、内容は確率論を基礎に、かなりしっかり書かれている。分散は平均値から各測定値までの距離の2乗の平均値であるとされ、偏差平方和を n で割る式が示されている。標本分散 s^2 は $n-1$ で割った値であり、それは「技術的な理由による (For technical reasons)」とのみ述べられている (p. 22)。

5. Statistics -the easy way- (3rd Ed.)

Statistics -the easy way- 3rd Ed. (Downing & Clark, 1997) は練習問題の多い教科書である。7つの吊り橋の長さのデータについて、平均値と分散を算出しているが、分散は偏差平方和を n で除した値であると述べられている (p. 18)。

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

しかし、母集団の性質を推定する場合には「少し異なった公式 (a slightly different formula)」が用いられるのであり、それは、

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

で与えられる。先の式と異なるのは n の代わりに $n-1$ が使われていることである (p. 19)。母集団の分散と標本の分散の分母が異なることについては、教科書の半ばほどの17章（信頼区間）で説明されている。しかしその説明を理解するためには13章のカイ 2 乗分布の説明を読まねばならない。

母集団の分散は

$$s^2 = \frac{(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2}{n}$$

として与えられるが、この両辺に $\frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

を掛けると、この式は、

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left[\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

と書ける。この大カッコ内は標準化された正規分布を 2 乗した値、つまりカイ 2 乗分布である。大カッコ内を Y^2 と置くと、 $s^2 = \frac{\sigma^2}{n} Y^2$ と書ける。 Y^2 の期待値はカイ 2 乗分布の定義に従って $n-1$ であるから、代入すると

$$s^2 = \frac{(n-1)}{n} \sigma^2$$

という、数学的には非常にシンプルでわかりやすい説明がなされている。これと似た説明は日本国内のいくつかの web ページにも見られた。しかし、統計学の初学者はカイ 2 乗分布についてはまだ習っていないこと、正規分布が前提となっていることから、数学に疎い学生がこの説明を理解するとは思えない。

6. 計測における誤差分析入門

計測における誤差分析入門 (Taylor, 1997) は物理学の教員によって書かれた理工系大学初年級向けの統計学入門書である。実測値のばらつきの処理という観点から書かれているため、説明の仕方は一般の統計学入門書とやや異なっている。心理学を始めとする行動科学では個々の測定値は多くの場合、各個人の何らかの特性を示すものであるが、ここで例として挙げられている工学的測定では測定対象は 1 つであり、それを複数回測定することによって、真の測定値を得ようとするのである。

分散は $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum d_i^2$ として与えられている。ここで d_i は測定値（標本）と標本平均値との差（測定誤差）である。

この教科書の著者は $n-1$ 問題については以下のように述べている。「ところが話はそう簡単ではなくて、分散にはもう一つの定義がある。式の n を $n-1$ で置き換えて以下のように定義するほうがよいという学説がある。」と述べ、 $n-1$ で除した式を示した上で、「(この後者の式のほうが) 適切であることの証明はここでは行わない。・・・しかし新しい定義が古い定義に比べて明らかに少し大きな値を与える点や、(古い方の定義式では) 測定回数 n が少ない時に過小に評価されがちである点が (新しい定義式では) 修正されていることについては述べておく必要がある。」そして「こうした傾向は $n=1$ (つまり、測定はただ 1 回のみ) という極端な (そして、ばかげた) 場合を検討することで理解できる」この場合、平均値はその 1 回の測定値であり、偏差はゼロになる。さらに $n-1$ で割る定義では、ゼロをゼロで割ることになって分散は定義できなくなるから、「ただ 1 回の測定だけでは誤差は全く知りようがない」という説明は、どうして複数のサンプルをとらねばならないのかという素朴な質問の答えとして

はわかりやすいかもしれない。この教科書は測定誤差を問題にしているせい、「 n は少なくとも5である必要がある。なぜなら5の平方根(2.2)と $5-1=4$ の平方根(2.0)の違いは多くの場合、重要ではないからだ。」しかし、レポートを読む人が計算のチェックをするときに必要であるから、「どちらの定義を用いたのかは実験レポートに明記しなければならない」という記述は非常に実用的である(p. 106-107)。なお、 n が5以上であれば、 n で割ることと $n-1$ で割ることの違いは重要でないという記述は、工学では10%の誤差は実用上、許容されるということの反映であろう。

IV. まとめ

標本分散から母分散を推定する場合の、いわゆる $n-1$ 問題について、日本語で書かれた教科書・入門書、及び英語で書かれた教科書・入門書についてそれぞれ6点ずつを検証した。標本の分散を算出する場合には n で、母分散の推定をする場合には $n-1$ で偏差平方和を割ることになっているという、天下り式の説明が多かった。2種類の分散の定義があることについては、母分散を推定するには n で割ると分散の値が小さく推定されるので $n-1$ で割るほうがよいと述べているものはあったが、なぜ $n-1$ が最善なのかを説明しているものはなかった。定義式を展開することで $n-1$ で割ることが最善であることを示した教科書等は見当たらなかった。その理由は、一つには、厳密に数式を用いて説明しようとする、分散の定義式の展開がかなり煩雑な式になることである。これには紙数を多く要し、統計学一般の教科書としては章立て上、バランスを欠くためであろう。

筆者らは、ここで上げた書籍以外に、web上でこの $n-1$ 問題を解説している日本語および英語のサイトを多数訪問したが、文系の初学者にとってわかりやすいと思われる解説を行っているものは見つからなかった。厳密な解説を試みたものはあるが、初学者向けの説明として適当とは思えなかった。しかし有益な示唆を与えるものを複数見出すことはできた。Web上の説明については本稿では割愛する。

筆者らは、正確さや厳密性を相当程度削っても、数学的知識に欠ける文系の大学生に「なるほど」と感じさせる説明方法がないかどうか、現在検討を重ねている。1つの道筋は、心理教育統計学(肥田野・瀬谷・大川, 1961)が用いているように、実例を示すことである。もう一つの道筋は、標本平均 \bar{X} の分散の期待値が $\frac{\sigma^2}{n}$ になることを説明することである。これらの説明の道筋については、近々に検討結果を公表したい。

文献 (References)

- Downing, D. and Clark, J. (1997). *Statistics -the easy way- 3rd. ed.* Barron's Educational Service, Inc., Hauppauge, New York.
- Gonick, L. and Smith, W. (1993). *The Cartoon guide to statistics.* Harper Collins. New York, NY.
- 肥田野 直・瀬谷正敏・大川信明 (1961). 心理教育統計学 培風館
- Marascuio, L.A. & Serlin, R.C. (1988). *Statistical methods for the social and behavioral science.* W.H. Freeman Co. New York.
- 森 敏昭・吉田寿夫 (1990). 心理学のためのデータ解析テクニカルブック 北大路書房
- 新村秀一 (1997). パソコン楽々統計学 講談社 ブルーバック B1198
- 西平重喜 (1957). 統計調査法 培風館
- 大谷信介、木下栄二・後藤範章・小松 洋・永野 武 (1999). 社会調査へのアプローチ ミネルヴァ書房
- Rumsey, D. (2003). *Statistics for dummies,* Wiley Publishing, Inc. Indianapolis, Indiana.

- テイラー, J.R. (2000). 計測における誤差分析入門 (林・馬場 (訳)) 東京化学同人 Taylor, J.R. (1997). *An introduction to error analysis (2nd ed.)*. University science books, University of Colorado.
- Wagner, S.F. (1992). *Introduction to statistics*. Harper Collins. New York, NY.
- 吉田寿夫 (1998). 本当にわかりやすいすごく大切なことが書いてあるごく初歩の統計の本 北大路書房 1998年